Teoria dell'Informazione

Esercizio svolto

Testo:

Per un sistema di trasmissione dati, si considerino i seguenti valori:

sorgente $S_X = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{Bmatrix}$, destinatario $S_Y = \{y_1 \quad y_2 \quad y_3\}$, canale $C = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}05 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}2 \end{bmatrix}$

Calcolare:

1) l'entropia della sorgente
2) l'entropia del destinatario
3) la probabilità di trasmissione/ricezione corretta e quella d'errore

Svolgimento:

1) Entropia della sorgente

Per definizione l'entropia risulta:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i I(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

Pertanto H(x) = 0,5 $\log_2$(1/0,5) + 0,5 $\log_2$(1/0,5) = 1 bit/simbolo

Ed infatti, poichè la sorgente è equiprobabile, si ha:

H(x) = H_{max}(x) = $\log_2$(n) = $\log_2$(2) = 1 bit/simbolo.

2) Entropia del destinatario

Preliminarmente osserviamo che il mittente trasmette due simboli (x_1 e x_2), mentre il destinatario ne riceve tre (y_1, y_2 e y_3). Ciò significa che il terzo simbolo ricevuto rappresenta un simbolo non riconosciuto (ignoto), e quindi certamente un fattore d'errore.

Per determinare l'entropia del destinatario calcoliamo dapprima le probabilità di ricevere i tre simboli (y_1, y_2 e y_3).

In generale:

La probabilità che il destinatario riceva il generico simbolo y_j è:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(y_j | x_i) p(x_i)$$

Dunque nel nostro caso:

$p(y_1) = p(x_1,y_1) + p(x_2, y_1) = p(y_1|x_1)p(x_1) + p(y_1|x_2)p(x_2) = 0{,}75 \times 0{,}5 + 0{,}05 \times 0{,}5 = 0{,}4$

$p(y_2) = p(x_1,y_2) + p(x_2, y_2) = p(y_2|x_1)p(x_1) + p(y_2|x_2)p(x_2) = 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}75 \times 0{,}5 = 0{,}4$

$p(y_3) = p(x_1,y_3) + p(x_2, y_3) = p(y_3|x_1)p(x_1) + p(y_3|x_2)p(x_2) = 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}2$

Come si può osservare la somma delle tre probabilità correttamente è 1.

Calcoliamo ora, applicando la definizione, l'entropia del destinatario:

H(y) = 0,4 $\log_2$(1/0,4) + 0,4 $\log_2$(1/0,4) + 0,2 $\log_2$(1/0,2) = 0,5288 + 0,5288 + 0,4644 = 1,522 bit/simbolo.

Osservazione: poichè il destinatario riceve I tre simboli con differenti probabilità risulta H(y) < H_{max}(y).

Infatti H_{max}(y) = $\log_2$(3) = 1,5850 bit/simbolo.

3) Probabilità di trasmissione/ricezione corretta (p_{CORR})

Questo valore rappresenta la probabilità di trasmettere il generico simbolo x e ricevere correttamente il relativo simbolo y.

Pertanto:

$p_{CORR} = p(x_1,y_1) + p(x_2,y_2) = p(y_1|x_1)p(x_1) + p(y_2|x_2)p(x_2) = 0{,}75 \times 0{,}5 + 0{,}75 \times 0{,}5 = 0{,}75$

3bis) Probabilità d'errore (p_{ERR})

$p_{ERR} = p(x_1,y_2) + p(x_1,y_3) + p(x_2,y_1) + p(x_2,y_3)$

dunque $p_{ERR} = p(y_2|x_1)p(x_1) + p(y_3|x_1)p(x_1) + p(y_1|x_2)p(x_2) + p(y_3|x_2)p(x_2)$

Ossia: $p_{ERR} = 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}25$

Infine, come si può osservare: $p_{ERR} = 1 - p_{CORR} = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.